

A_n simple pour $n \geq 5$

lemme: pour $n \geq 5$ les 3-cycles engendrent A_n et ils sont conjugués.

preuve: $\sigma \in A_n$, $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{2k}$ avec τ_i des transpositions

Il suffit donc de montrer qu'un produit de deux transpositions peut être vu comme un produit de 3-cycles

$$\begin{aligned} \text{3 cas: } (ij)(ji) &= e \\ (ij)(jk) &= (ijk) \\ (ij)(kl) &= (ij)(jkl)(jkl)(kl) \\ &= (ijk)(jkl) \end{aligned}$$

Donc les 3-cycles engendrent A_n

Montrons qu'ils sont tous conjugués

Soient γ, γ' deux 3-cycles. $\exists g \in S_n / \gamma' = g\gamma g^{-1}$

(principe conjugaison, ou conjugaison dans S_n)

Donc soit $g \in A_n$ et dans ce cas γ' et γ sont conjugués

soit $g \in S_n \setminus A_n$, et $\exists t$ transposition à support disjoint de γ (car $n \geq 5$) donc gt permutation paire et γ et t

commutent. $\gamma' = gt\gamma(gt)^{-1} = g\gamma g^{-1}$

donc γ' et γ sont conjugués dans A_n .

Théorème: A_n simple pour $n \geq 5$

Preuve: $H \triangleleft A_n$ $H \neq \{1\}$ si H contient un 3-cycle il contient alors toute la classe de conjugaison de γ donc H contient tout les 3-cycles et donc par le lemme $H = A_n$

On va donc montrer que H contient un 3-cycle

Soit $h \in H$ non trivial / $m = |\text{Supp}(h)| = |\{x \in X / h(x) \neq x\}|$
soit minimal.

• $m \geq 3$ sinon 2 transpositions impossibles

• si $m=3$ h 3-cycles $\Rightarrow$ conclusion

• si $m=4$ $h = (ab)(cd)$

$$\gamma = (cde)$$

$$[\gamma, h] \in H \quad (\gamma(a)\gamma(b))(\gamma(c)\gamma(d))$$

$$\gamma h \gamma^{-1} h^{-1} = (ab)(de)(ab)(cd)$$

$$= (ced) \in H$$

contredit la minimalité de m

• $m=5$ $h = (abcde)$

$$\gamma = (acb) \quad \gamma^{-1} = (abc)$$

$$[\gamma, h] = (acb)(b-c-d) = (acd)$$

$$\gamma h \gamma^{-1} h^{-1} = (h(a)h(b)h(c))$$

contredit encore minimalité de m

• $m \geq 5$ $a \in \text{supp } h$, $b = h(a)$ et $c \neq a, b, h(b)$

$$\gamma = (abc)$$

$$[\gamma, h] = (abc)(h(a)h(c)h(b))$$

$$= h \gamma^{-1} h^{-1}$$

$$= (abc)(b-h(c)h(b))$$

$$[\gamma, h] \neq 1 \text{ car } h(b) \rightarrow c \text{ et } c \neq h(b)$$

$$\text{or } |\text{supp } [\gamma, h]| \leq |\{a, b, c, h(b), h(c)\}| < m$$

contredit encore minimalité de m

d'où $m=3$